

Függvények határértéke, folytonossága

ÖSSZEFOGLALÁS, GYAKORLÁS

Elméleti kérdések:

► Válaszoljon az alábbi kérdésekre!

1. Fogalmazza meg a függvény definícióját!
2. Mit nevezünk egy függvény értelmezési tartományának, értékkészletének?
3. Fogalmazza meg a monoton növekvő illetve monoton csökkenő függvény definícióját! Mikor tekintünk egy függvényt szigorúan monoton növekvőnek illetve szigorúan monoton csökkenőnek?
4. Fogalmazza meg a függvény zérushelyének definícióját!
5. Fogalmazza meg a függvény szélsőértékének definícióját!
6. Fogalmazza meg a függvény helyi szélsőértékének definícióját!
7. Mikor nevezünk egy függvényt párosnak illetve páratlannak?
8. Mikor nevezünk egy függvényt periodikusnak?

- 
9. Mikor nevezünk egy függvényt alulról korlátosnak, felülről korlátosnak illetve korlátosnak?
 10. Mikor nevezünk egy függvényt konvexnek illetve konkávnak?
 11. Mit értünk inflexiós pont alatt?
 12. Fogalmazza meg az összetett függvény definícióját!
 13. Fogalmazza meg a függvény véges helyen vett határértékének definícióját!
 14. Fogalmazza meg a függvény pontban való folytonosságának definícióját!

Feladatok:

1. Ábrázolja az $f: [-2; 2] \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ függvény grafikonját derékszögű koordinátarendszerben és jellemezze a tanult szempontok alapján!
2. Ábrázolja az alábbi függvények grafikonját derékszögű koordinátarendszerben:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 6x + 5|$
 - b) $g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x+2} - 1\right)$
3. Adja meg az $f: [3; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény inverzének hozzárendelési szabályát!

4. Határozza meg a megadott függvények határértékét a megadott helyen!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 7x + 12}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^2 + x}{x^3 + x^2 - 2x}$

5. Határozza meg a megadott függvények határértékét a 0-ban!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

6. Határozza meg a megadott függvények határértékét a $\pm\infty$ -ben!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x-100}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+500x}{x^2-10^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}$

7. Határozza meg a b valós paraméter értékét úgy, hogy a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x + 1), & \text{ha } x < -1 \\ 2x + b, & \text{ha } x \geq -1 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen.

8. Írja fel az alábbi függvényeket egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x$, ahol $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \sin x + x^2 + x$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

- 
9. A tengeren egy hajó déli irányban halad 80 km/h sebességgel, egy másik kelet felé tart 40 km/h sebességgel. A hajók egy-egy egyenes mentén haladnak az egyenesek metszéspontja felé. Déli 12 órakor az első hajó 400 km -re, a második 300 km -re van a két egyenes metszéspontjától.
- a) Mennyi a két hajó távolsága 12 órakor illetve 13 órakor?
 - b) Ha megállás nélkül haladnak, mikor lesznek egymáshoz a legközelebb?
 - c) Mennyi lesz a két hajó között a legkisebb távolság?